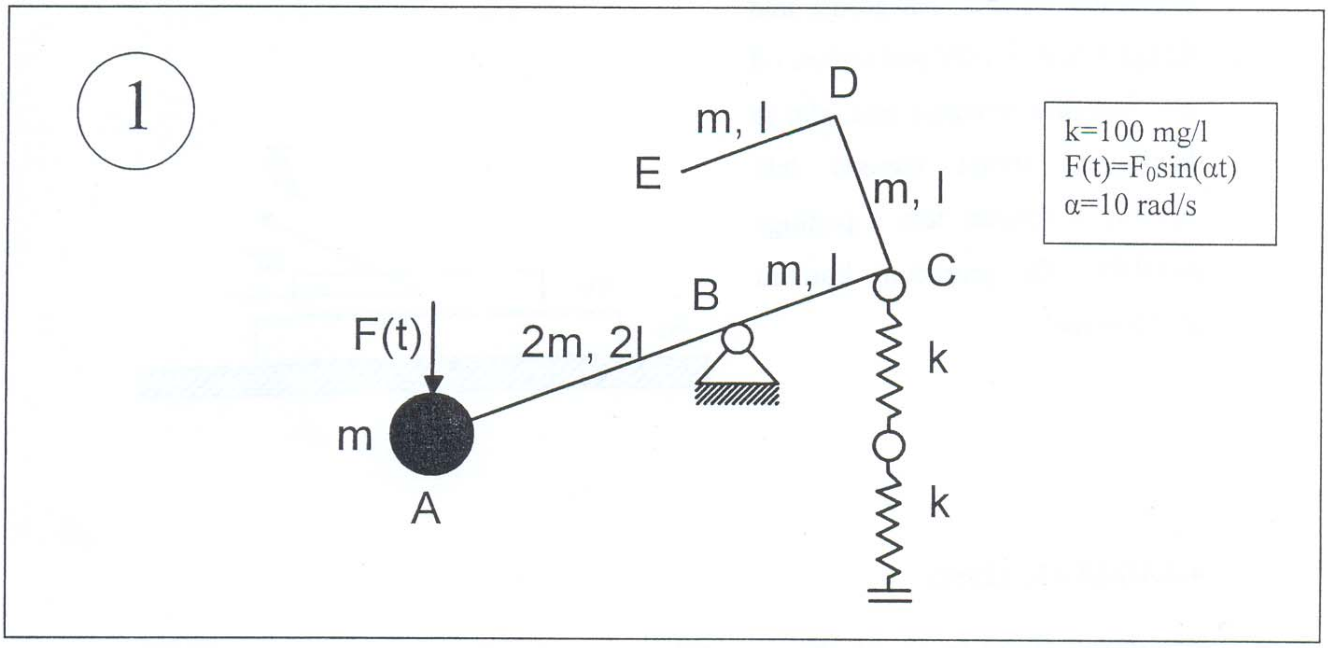
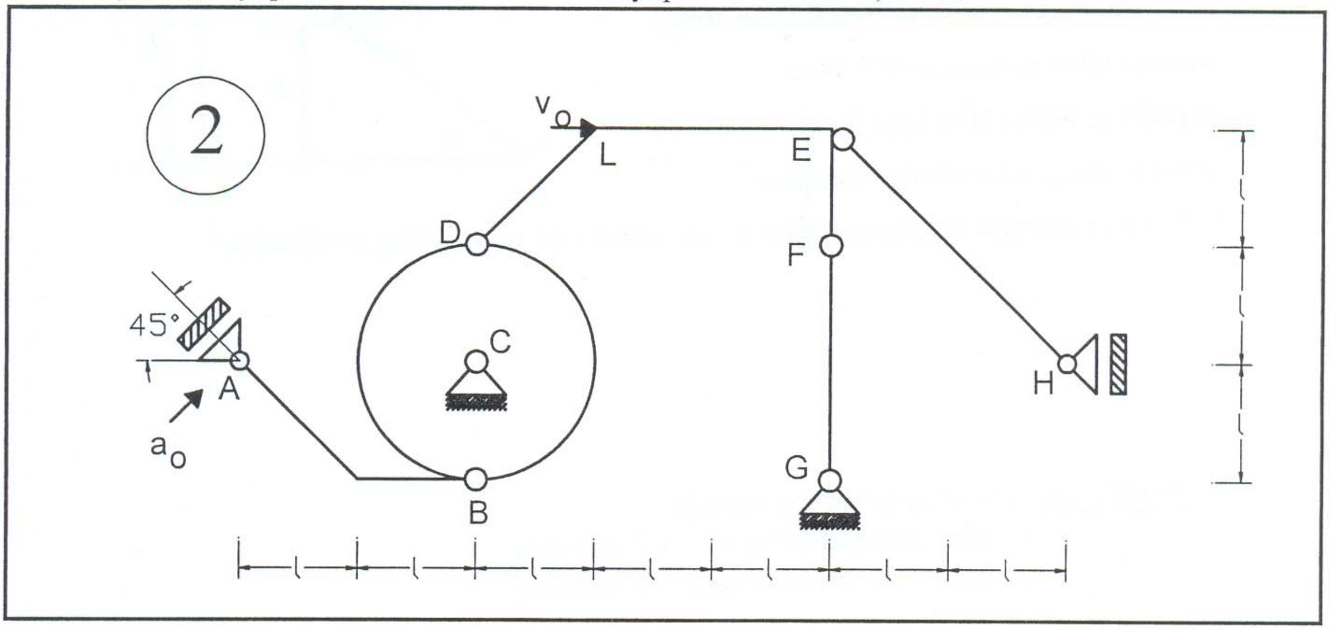
ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ
Катедра за Техничку механику и теорију конструкција
Испит из **ТЕХНИЧКЕ МЕХАНИКЕ - 2** **23.06.2007.**

ГРУПА **А**

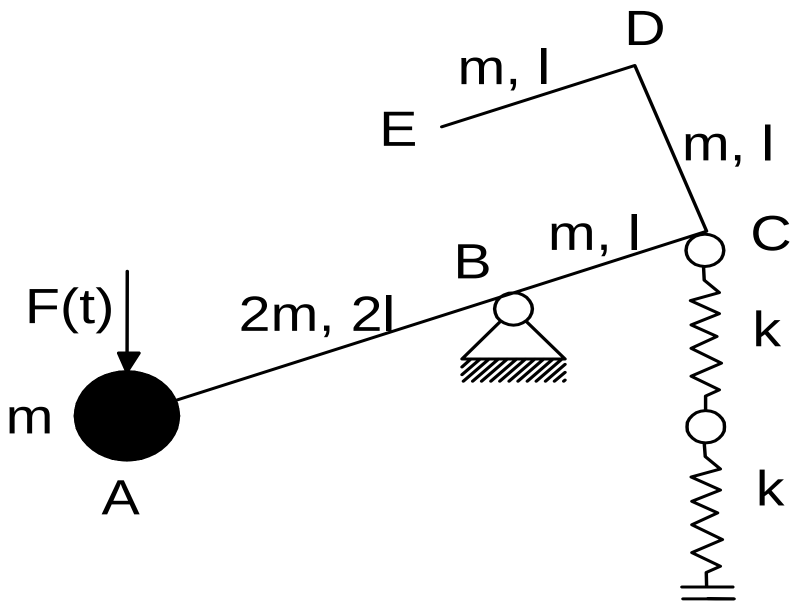
1. ЗАДАТАК: (30%) Механички систем на скици (1) креће се у вертикалној равни и при томе врши мале осцилације. Опруге су ненапрегнуте када је штап AC хоризонталан. Одредити:
а) Диференцијалну једначину кретања,
б) Кружну фреквенцију и период осциловања,
в) Вредност параметра дужине (l = ?) при коме долази до резонансе.



2. ЗАДАТАК: (30%) У приказаном положају механизма на слици (2), познати су брзина тачке L и убрзање тачке A : $v_L = v_0$, $a_A = a_0$. Одредити:
а) Угаоне брзине свих тела система и брзине тачака A,B,E,F и H .
б) Угаона убрзања свих тела система и убрзања тачака D,E и H.

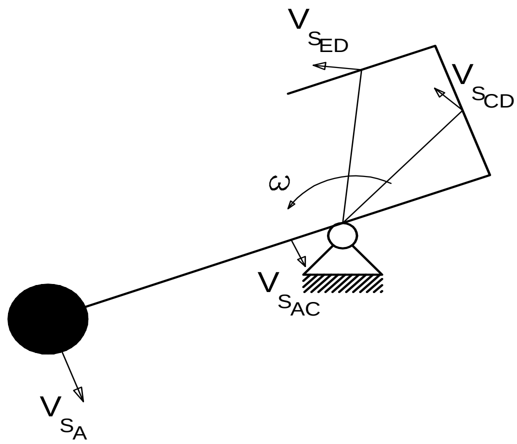


НАПОМЕНА: Услов за полагање испита је:
- мин. 30% (од 60%) на 1. и 2. задатку,
- мин. 20% (од 40%) на 3. и 4. задатку.



Zadatak 1.

a)

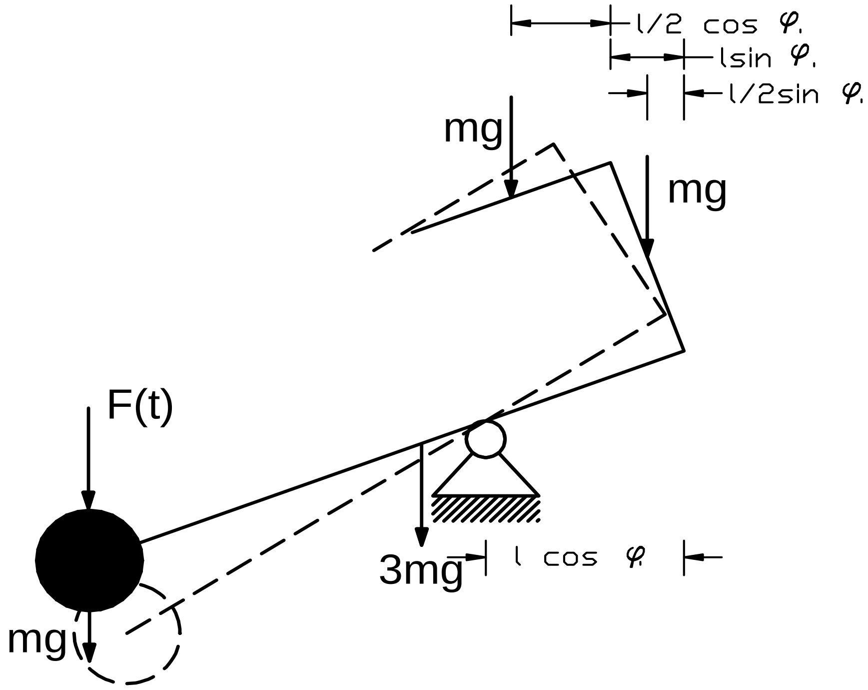


$$
\begin{aligned}
\omega &= \dot{\varphi} \\
v_A &= \dot{\varphi} \cdot 2l \\
v_{S_{AC}} &= \dot{\varphi} \cdot \frac{l}{2} \\
v_{S_{CD}} &= \dot{\varphi} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} l \\
v_{S_{DE}} &= \dot{\varphi} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} l
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T &= T_A + T_{AC} + T_{CD} + T_{DE} \\
T_A &= \frac{1}{2} m(\dot{\varphi} \cdot 2l)^2 = 2m\dot{\varphi}^2 l^2 \\
T_{AC} &= \frac{1}{2} 3m(\dot{\varphi} \cdot \frac{1}{2} l)^2 + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{12} 3m \cdot (3l)^2) \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{2} m\dot{\varphi}^2 l^2 \\
T_{AC} &= \frac{1}{2} m(\dot{\varphi} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} l)^2 + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{12} m \cdot l^2) \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3} m\dot{\varphi}^2 l^2 \\
T_{DE} &= \frac{1}{2} m(\dot{\varphi} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} l)^2 + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{12} m \cdot l^2) \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3} m\dot{\varphi}^2 l^2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{29}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2 \\ \frac{\delta T}{\delta \dot{\varphi}} &= \frac{29}{3} m l^2 \dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta \dot{\varphi}} &= \frac{29}{3} m l^2 \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{eq}} &= \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \\ k_{eq} &= \frac{k}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \delta A &= mg \cdot 2l\cos\varphi\delta\varphi + F(t)\cdot 2l\cos\varphi\delta\varphi + 3mg\frac{l}{2}\cos\varphi\delta\varphi - k_{eq}\cdot l\sin\varphi\cdot l\cos\varphi\delta\varphi \\ & \quad -mg\cdot(l\cos\varphi - \frac{l}{2}\sin\varphi)\delta\varphi - mg\cdot(l\cos\varphi - l\sin\varphi - \frac{l}{2}\cos\varphi)\delta\varphi \\ &= Q_\varphi \delta\varphi \\ Q_\varphi &= 2mgl\cos\varphi + F(t)\cdot 2l\cos\varphi - \frac{k}{2}l^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{3}{2}mgl\sin\varphi \end{aligned}$$

Male oscilacije:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &\approx 1 \\ \sin\varphi &\approx \varphi \\ Q_\varphi &= 2mgl - \frac{k}{2}l^2\varphi + \frac{3}{2}mgl\varphi \end{aligned}$$

Diferencijalna jednačina kretanja:

$$\frac{29}{3}ml^2\ddot{\varphi} = 2mgl + 2F(t)l - \frac{k}{2}l^2\varphi + \frac{3}{2}mgl\varphi$$
$$\ddot{\varphi} + \varphi \cdot (\frac{3}{58}\frac{k}{m} - \frac{9}{58}\frac{g}{l}) = \frac{6g}{29l} + \frac{6F(t)}{29ml}$$

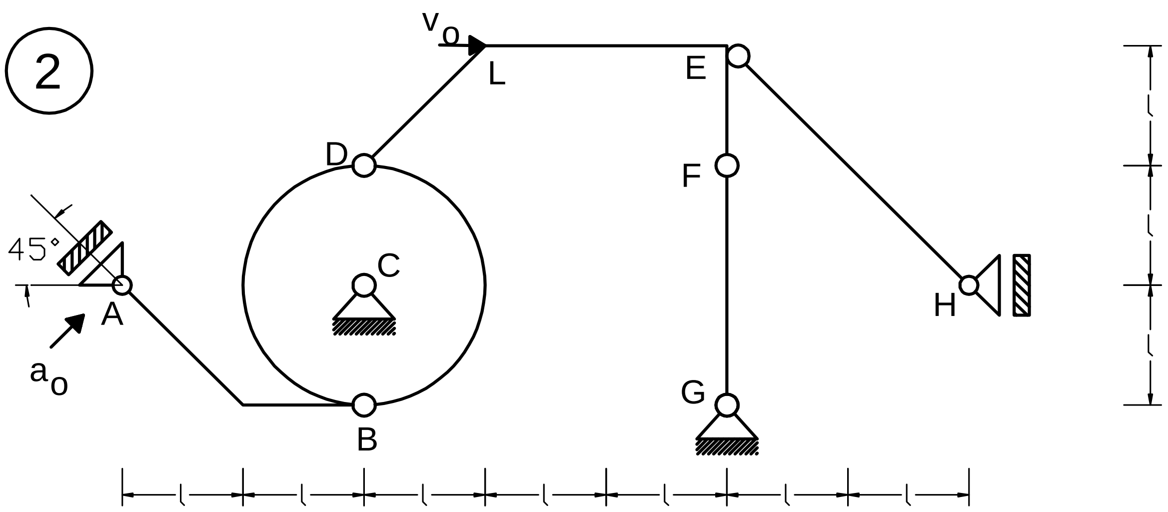
b)

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{3k}{58m} - \frac{9g}{58l} = 5.017\frac{g}{l} \\ \omega &= 2.24\sqrt{\frac{g}{l}} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = 2.805\sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}$$

c) Rezonansa:

$$\begin{aligned} \omega &= \alpha \\ 2.24\sqrt{\frac{g}{l}} &= 10 \\ l &= 0.70m \end{aligned}$$

Zadatak 2.

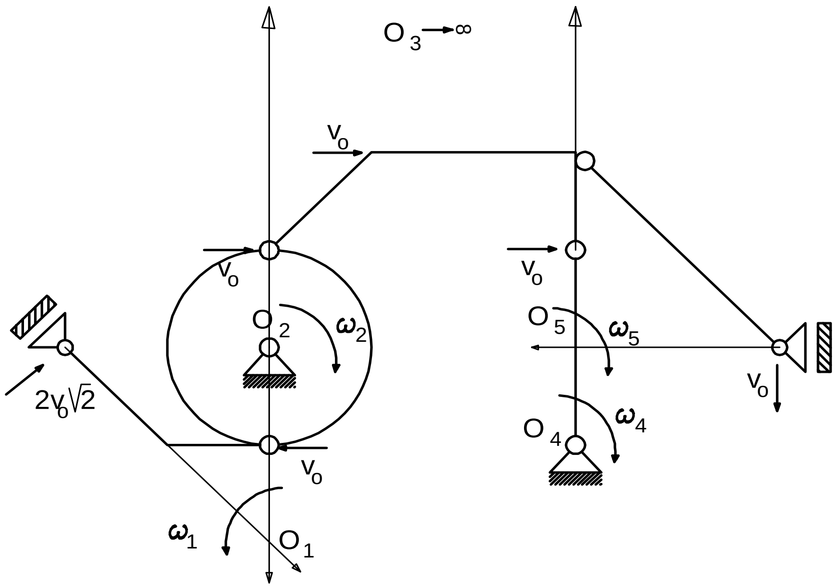


* **Brzine:**

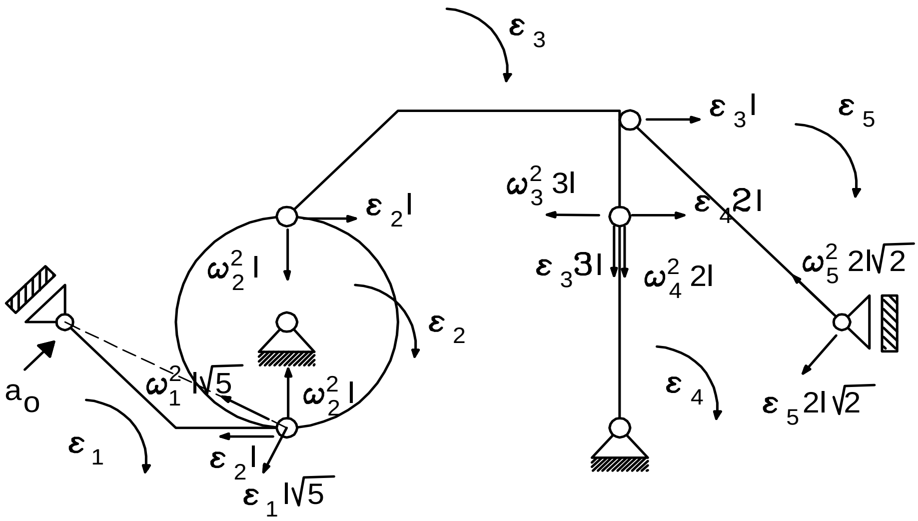
$$
\begin{aligned}
v_D &= v_o = \omega_2 \cdot \bar{0_2 D} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_0}{l} \\
v_B &= \omega_2 \cdot \bar{0_2 B} \Rightarrow v_B = v_0 \\
v_B &= \omega_1 \cdot \bar{0_1 B} \Rightarrow \omega_1 = \frac{v_0}{l} \\
O_3 &\rightarrow \infty \Rightarrow \omega_3 = 0 \Rightarrow v_D = v_E = v_F = v_o \\
v_F &= \omega_4 \cdot \bar{0_4 F} \Rightarrow \omega_4 = \frac{v_0}{2l} \\
v_A &= \omega_1 \cdot \bar{0_1 A} \Rightarrow v_A = 2v_0\sqrt{2} \\
v_H &= \omega_5 \cdot \bar{0_5 H} \Rightarrow v_H = v_0 \\
v_E &= \omega_5 \cdot \bar{0_5 E} \Rightarrow \omega_5 = \frac{v_0}{2l}
\end{aligned}
$$

* **Ubrzanja:**

$$
\begin{aligned}
\vec{a_B} &= \vec{a}_A + \vec{a}_{B,N}^{A} + \vec{a}_{B,T}^{A} \\
\vec{a_B} &= \vec{a}_C + \vec{a}_{B,N}^{C} + \vec{a}_{B,T}^{C}
\end{aligned}
$$



O3→∞
vo
vo
vo
O2
ω2
O5
ω5
vo
2vo√2
O4
ω4
vo
ω1
O1



ε3
ε3l
ε5
ω3² 3l
ε2l
ε4 2l
ω5² 2l√2
ω2² l
ε3 3l
ω4² 2l
ε2
ao
ω1² l√5
ω2² l
ε4
ε5 2l√2
ε1
ε2 l
ε1 l√5

$$
\begin{aligned}
X &: \quad a_o\frac{\sqrt{2}}{2} - {\omega_1}^2 l\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - \varepsilon_1 l\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = -\varepsilon_2\cdot l \\
Y &: \quad a_o\frac{\sqrt{2}}{2} + {\omega_1}^2 l\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - \varepsilon_1 l\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -{\omega_2}^2\cdot l \\
\varepsilon_1 &= \frac{a_o\sqrt{2}}{4l} \\
\varepsilon_2 &= \frac{2{v_o}^2}{l^2} - \frac{a_o\sqrt{2}}{4l} \\
\vec{a_D} &= \vec{a}_C + \vec{a}^C_{D,N} + \vec{a}^C_{D,T} \\
a_{Dx} &= \varepsilon_2\cdot l = \frac{2{v_o}^2}{l} - \frac{a_o\sqrt{2}}{4l} \\
a_{Dy} &= -{\omega_2}^2\cdot l = -\frac{{v_o}^2}{l} \\
\vec{a_F} &= \vec{a}_D + \vec{a}^D_{F,N} + \vec{a}^D_{F,T} \\
\vec{a_F} &= \vec{a}_G + \vec{a}^G_{F,N} + \vec{a}^G_{F,T} \\
X &: \quad \frac{2{v_o}^2}{l} - \frac{a_o\sqrt{2}}{4} = \varepsilon_4\cdot 2l \\
Y &: \quad -\varepsilon_3\cdot 3l = -{\omega_4}^2\cdot 2l \\
\varepsilon_3 &= \frac{{v_o}^2}{6l^2} \\
\varepsilon_4 &= \frac{{v_o}^2}{2l^2} - \frac{a_o\sqrt{2}}{8l} \\
\vec{a_F} &= \vec{a}_G + \vec{a}^G_{F,N} + \vec{a}^G_{F,T} \\
a_{Fx} &= \varepsilon_4\cdot 2l = \frac{{v_o}^2}{l} - \frac{a_o\sqrt{2}}{4} \\
a_{Fy} &= -{\omega_4}^2\cdot 2l = -\frac{{v_o}^2}{2l} \\
\vec{a_E} &= \vec{a}_F + \vec{a}^F_{E,N} + \vec{a}^F_{E,T} \\
a_{Ex} &= \frac{7{v_o}^2}{6l} - \frac{a_o\sqrt{2}}{4} \\
a_{Ey} &= -\frac{{v_o}^2}{2l} \\
\vec{a_H} &= \vec{a}_E + \vec{a}^E_{H,N} + \vec{a}^E_{H,T} \\
X &: \quad 0 = -\frac{7}{6}\frac{{v_o}^2}{l} - {\omega_5}^2\cdot 2l\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon_5\cdot 2l\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\
Y &: \quad -a_H = -\frac{{v_o}^2}{2l} + {\omega_5}^2\cdot 2l - \varepsilon_5\cdot 2l \\
\varepsilon_5 &= \frac{1}{3}\frac{{v_o}^2}{l^2} - \frac{a_o\sqrt{2}}{8l}
\end{aligned}
$$